Corrigé

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

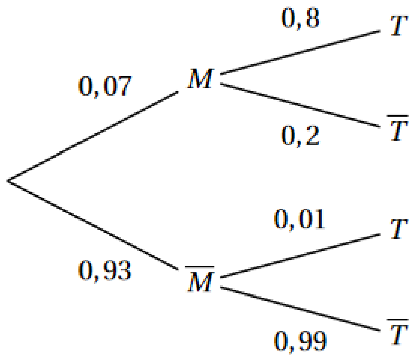
- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.

On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Pour calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$, on s'appuie sur un arbre pondéré :



On a donc $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers, d'après les probabilités totales,
$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653$.

3. $P_M(T)$ est la probabilité d'avoir un test positif sachant qu'on est malade, et $P_T(M)$ est la probabilité d'être malade sachant que le test est positif.
Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif c'est-à-dire $P_T(M)$.

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
La probabilité qu'elle soit malade est : $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,07 \times 0,8}{0,0653} \approx 0,86$

5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

a. Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, on a une indépendance des 10 tirages, le succès étant défini par le test positif, on peut assimiler cette variable aléatoire à une loi de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$

b. La probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif est :
$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8 \approx 0,11$

6. On veut déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

Soit n le nombre de personnes testées ; on cherche n pour que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ soit

$1 - 0,9347^n \geqslant 0,99 \iff 0,9347^n \leqslant 0,01 \iff n\ln(0,9347) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01}{\ln(0,9347}$. Or $\dfrac{\ln(0,01}{\ln(0,9347} \approx$ 68,2.

Il faut donc tester 69 personnes dans ce pays pour que au moins une ait un test positif.